СИСТЕМА MMAP[2]|PH[2]|N+R С ПОВТОРНЫМИ ВЫЗОВАМИ И ЗАРЕЗЕРВИРОВАННЫМИ ПРИБОРАМИ

В. В. Мушко

Белорусский государственный университет
Минск, Беларусь
E-mail: mushko@bsu.by

Рассматривается многолинейная система с маркированным марковским входным потоком, фазовым обслуживанием, повторными вызовами и зарезервированными приборами. Интенсивность повторных вызовов линейно зависит от числа вызовов на орбите. Найдено достаточное условие существования стационарного распределения.

Ключевые слова: многолинейная система, маркированный марковский входной поток, фазовое обслуживание, повторные вызовы, стационарное распределение.

ОПИСАНИЕ СИСТЕМЫ

Рассматривается многолинейная система массового обслуживания, имеющая $N+R$ приборов.

Поток вызовов, входящий в систему, является маркированным марковским входным потоком (Marked Markovian Arrival Process, MMAP, введен в [1]). Прибытием вызовов в MMAP-потоке управляет неприводимая цепь Маркова (ЦМ) $\nu_t, t \geq 0$, с непрерывным временем и с пространством состояний $\{0, 1, \dots, W\}$. MMAP-поток задается матрицами $D_0, D_l, l = \overline{1, K}$.

Предположим, что в систему поступают вызовы двух типов, $K = 2$. Если в систему поступает вызов первого типа и застает хотя бы один прибор свободным, то вызов занимает его и после обслуживания покидает систему. Если же все $N + R$ приборов заняты, то вызов уходит из системы навсегда. Если в систему поступает вызов второго типа и застает менее N приборов занятыми, то вызов занимает один из приборов и после обслуживания покидает систему. Если же хотя бы N приборов заняты, то с вероятностью p вызов направляется в некоторую виртуальную динамическую область, называемую орбитой, и пытается получить обслуживание позже, и с дополнительной вероятностью $(1 - p)$ уходит из системы. Каждый вызов, находящийся на орбите, совершает повторные попытки попасть на обслуживание через интервалы времени, имеющие экспоненциально распределенную длину с параметром $\alpha, \alpha > 0$, независимо от других вызовов. Если в момент повтора по крайней мере N приборов заняты, то с вероятностью q вызов возвращается на орбиту и с дополнительной вероятностью $(1 - q)$ уходит из системы.

Время обслуживания вызова типа l имеет распределение фазового типа (Phase-type, PH-type [2]) с неприводимым представлением $\left(\beta^{(l)}, S^{(l)}\right), l = 1, 2.$ Процессом обслуживания управляет ЦМ $\eta_t^{(l)}, t \geq 0$, с непрерывным временем и с пространством состояний $\{1, \dots, M_l, M_l + 1\}, l = 1, 2$.

ЦЕПЬ МАРКОВА С НЕПРЕРЫВНЫМ ВРЕМЕНЕМ

Введем следующие обозначения:

$i_t, t \geq 0$, – число вызовов второго типа на орбите в момент времени t, $i_t \geq 0$;

$n_t, t \geq 0$, – число занятых приборов в момент времени t, $n_t = \overline{0, N + R}$;

$j_t, t \geq 0$, – число занятых приборов вызовами первого типа в момент времени t, $j_t = \overline{0, n_t}, n_t = \overline{0, N}$, и $j_t = \overline{n_t - N, n_t}, n_t = \overline{N + 1, N + R}$;

$\nu_t, t \geq 0$, – состояние управляющего процесса MMAP-потока в момент времени t, $\nu_t = \overline{0, W}$;

$h_t^{\left(\eta_t^{(1)}\right)}, t \geq 0$, – число приборов, обслуживающих вызов первого типа на $\eta_t^{(1)}$-й фазе, в момент времени t, $h_t^{\left(\eta_t^{(1)}\right)} \in \{0, \dots, j_t\}$, $\eta_t^{(1)} = \overline{1, M_1}$, $\sum_{\eta_t^{(1)}=1}^{M_1} h_t^{\left(\eta_t^{(1)}\right)} = j_t$;

$g_t^{\left(\eta_t^{(2)}\right)}, t \geq 0$, – число приборов, обслуживающих вызов второго типа на $\eta_t^{(2)}$-й фазе, в момент времени t, $g_t^{\left(\eta_t^{(2)}\right)} \in \{0, \dots, n_t - j_t\}$, $\eta_t^{(2)} = \overline{1, M_2}$, $\sum_{\eta_t^{(2)}=1}^{M_2} g_t^{\left(\eta_t^{(2)}\right)} = n_t - j_t$.

Под состоянием системы в момент времени $t, t \geq 0$, будем понимать вектор $\left(i_t, n_t, j_t, \nu_t, h_t^{(1)}, \dots, h_t^{(M_1)}, g_t^{(1)}, \dots, g_t^{(M_2)}\right)$, $t \geq 0$.

Рассмотрим процесс $\zeta_t, t \geq 0$, описывающий изменение состояний системы, $\zeta_t = \left\{i_t, n_t, j_t, \nu_t, h_t^{(1)}, \dots, h_t^{(M_1)}, g_t^{(1)}, \dots, g_t^{(M_2)}\right\}$, $t \geq 0$.

Обозначим через Q инфинитезимальный генератор (ИГ) процесса $\zeta_t, t \ge 0$.

Упорядочим состояния процесса $\zeta_t, t \ge 0$, в лексикографическом порядке возрастания компонент (i_t, n_t, j_t, v_t) и убывания компонент $\left(h_t^{(1)}, \ldots, h_t^{(M_1)}\right)$, $\left(g_t^{(1)}, \ldots, g_t^{(M_2)}\right)$. Такой способ упорядочивания позволит нам использовать далее результаты работ [3, 4].

Обозначим стационарное распределение процесса $\zeta_t, t \ge 0$, через

$$p(i, n, j, \nu, h_1, \ldots, h_{M_1}, g_1, \ldots, g_{M_2}) =$$

$$= \lim_{t\to\infty} P\left(i_t = i, n_t = n, j_t = j, \nu_t = \nu, h_t^{(1)} = h_1, \ldots, h_t^{(M_1)} = h_{M_1}, g_t^{(1)} = g_1, \ldots, g_t^{(M_2)} = g_{M_2}\right),$$

$$i \ge 0;\ j = \overline{0, n}, n = \overline{0, N};\ j = \overline{n-N, n}, n = \overline{N+1, N+R};\ \nu = \overline{0, W};\ h_{\eta_1} \in \{0, \ldots, j\},$$

$$\eta_1 = \overline{1, M_1},\ \sum_{\eta_1=1}^{M_1} h_{\eta_1} = j;\ g_{\eta_2} \in \{0, \ldots, n - j\},\ \eta_2 = \overline{1, M_2},\ \sum_{\eta_2=1}^{M_2} g_{\eta_2} = n - j\ .$$

Условие существования пределов приведено ниже и предполагается далее выполненным.

Введем векторы $\boldsymbol{p}_i$ стационарных вероятностей $p(i, n, j, \nu, h_1, \ldots, h_{M_1}, g_1, \ldots, g_{M_2})$, соответствующие наличию i вызовов на орбите, $i \ge 0$.

Обозначим также $\boldsymbol{p} = (\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_i, \ldots)$. Вектор p удовлетворяет следующей системе уравнений: $\boldsymbol{p}Q = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{p}\mathbf{e} = 1$, где $\mathbf{0}$ – вектор-строка, состоящая из нулей, $\boldsymbol{e}$ – вектор-столбец, состоящий из единиц.

Лемма. ИГ Q процесса $\zeta_t, t \ge 0$, имеет блочную структуру

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{0,0} & Q_{0,1} & O & O & \cdots \\ Q_{1,0} & Q_{1,1} & Q_{1,2} & O & \cdots \\ O & Q_{2,1} & Q_{2,2} & Q_{2,3} & \cdots \\ O & O & Q_{3,2} & Q_{3,3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

ненулевые блоки ИГ Q определяются следующим образом:

$$\left(Q_{i,i}\right)_{n,n'} = \begin{cases} L(n), & n' = n-1, \quad n = \overline{1, N}; \\ \tilde{L}(n), & n' = n-1, \quad n = \overline{N+1, N+R}; \\ A(n) - i\alpha\left(1 - q\delta(n)\right) I_{\overline{W}K(n)}, & n' = n, \quad n = \overline{0, N-1}; \\ \hat{A}(n) - i\alpha\left(1 - q\delta(n)\right) I_{\overline{W}K(n)}, & n' = n, \quad n = N; \\ \tilde{A}(n) - i\alpha\left(1 - q\delta(n)\right) I_{\overline{W}K(n)}, & n' = n, \quad n = \overline{N+1, N+R-1}; \\ \bar{A}(n) - i\alpha\left(1 - q\delta(n)\right) I_{\overline{W}K(n)}, & n' = n, \quad n = N+R; \\ P(n), & n' = n+1, \quad n = \overline{0, N-1}; \\ \hat{P}(n), & n' = n+1, \quad n = N; \\ \tilde{P}(n), & n' = n+1, \quad n = \overline{N+1, N+R-1}; \\ O, & \text{иначе}, \end{cases}$$

$$
\left(Q_{i,i+1}\right)_{n,n'} = \begin{cases} \ddot{A}(n), & n' = n, \quad n = N; \\ \dddot{A}(n), & n' = n, \quad n = \overline{N+1, N+R}; \\ O, & \text{иначе}, \end{cases}
$$

$$
\left(Q_{i,i-1}\right)_{n,n'} = i\alpha \begin{cases} (1-q) I_{\overline{W}K(n)}, & n' = n, \quad n = \overline{N, N+R}; \\ \ddot{P}(n), & n' = n+1, \quad n = \overline{0, N-1}; \\ O, & \text{иначе}, \end{cases}
$$

где размерность блока с индексами n, n' равна $\overline{W}K(n) \cdot \overline{W}K(n')$, $\overline{W} = W + 1$,

$$
K(n) = \begin{cases} \sum\limits_{j=0}^{n} K_1(j) K_2(n-j), & n = \overline{0, N}; \\ \sum\limits_{j=n-N}^{n} K_1(j) K_2(n-j), & n = \overline{N+1, N+R}, \end{cases} \quad K_l(n) = \begin{pmatrix} n + M_l - 1 \\ M_l - 1 \end{pmatrix}, \ l = 1, 2,
$$

$$
A(n) = \operatorname{diag}\left\{D_0 \oplus \left(\left(A\left(j, S^{(1)}\right) + \Delta\left(j, S^{(1)}\right)\right) \oplus \left(A\left(n-j, S^{(2)}\right) + \Delta\left(n-j, S^{(2)}\right)\right)\right), j = \overline{0, n}\right\}, n = \overline{0, N-1},
$$

$$
\hat{A}(n) = \operatorname{diag}\left\{\left(D_0 + (1-p) D_2\right) \oplus \left(\left(A\left(j, S^{(1)}\right) + \Delta\left(j, S^{(1)}\right)\right) \oplus \left(A\left(n-j, S^{(2)}\right) + \Delta\left(n-j, S^{(2)}\right)\right)\right), j = \overline{0, n}\right\}, n = N,
$$

$$
\tilde{A}(n) = \operatorname{diag}\left\{\left(D_0 + (1-p) D_2\right) \oplus \left(\left(A\left(j, S^{(1)}\right) + \Delta\left(j, S^{(1)}\right)\right) \oplus \left(A\left(n-j, S^{(2)}\right) + \Delta\left(n-j, S^{(2)}\right)\right)\right), j = \overline{n-N, n}\right\},
$$

$$
n = \overline{N+1, N+R-1},
$$

$$
\overline{A}(n) = \operatorname{diag}\left\{\left(D_0 + D_1 + (1-p) D_2\right) \oplus \right.
$$

$$
\left. \oplus \left(\left(A\left(j, S^{(1)}\right) + \Delta\left(j, S^{(1)}\right)\right) \oplus \left(A\left(n-j, S^{(2)}\right) + \Delta\left(n-j, S^{(2)}\right)\right)\right), j = \overline{n-N, n}\right\}, n = N+R,
$$

$$
\ddot{A}(n) = \operatorname{diag}\left\{p D_2 \otimes I_{K_1(j) K_2(n-j)}, \ j = \overline{0, n}\right\}, n = N,
$$

$$
\dddot{A}(n) = \operatorname{diag}\left\{p D_2 \otimes I_{K_1(j) K_2(n-j)}, \ j = \overline{n-N, n}\right\}, n = \overline{N+1, N+R},
$$

$$
L(n) =
$$

$$
= \begin{pmatrix} I_{\overline{W}K_1(0)} \otimes L_{N+R-n}\left(\tilde{S}^{(2)}\right) & O & \cdots & O \\ I_{\overline{W}} \otimes L_{N+R-1}\left(\tilde{S}^{(1)}\right) \otimes I_{K_2(n-1)} & I_{\overline{W}K_1(1)} \otimes L_{N+R-(n-1)}\left(\tilde{S}^{(2)}\right) & \cdots & O \\ O & I_{\overline{W}} \otimes L_{N+R-2}\left(\tilde{S}^{(1)}\right) \otimes I_{K_2(n-2)} & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & I_{\overline{W}K_1(n-1)} \otimes L_{N+R-1}\left(\tilde{S}^{(2)}\right) \\ O & O & \cdots & I_{\overline{W}} \otimes L_{N+R-n}\left(\tilde{S}^{(1)}\right) \otimes I_{K_2(0)} \end{pmatrix},
$$

$$
n = \overline{1, N},
$$

$$\widetilde{L}(n)=\begin{pmatrix} I_{\overline{W}}\otimes L_{N+R-j}\left(\widetilde{S}^{(1)}\right)\otimes I_{K_2(n-j)} & I_{\overline{W}K_1(j)}\otimes L_{N+R-(n-j)}\left(\widetilde{S}^{(2)}\right) & \cdots & O \\ O & I_{\overline{W}}\otimes L_{N+R-j-1}\left(\widetilde{S}^{(1)}\right)\otimes I_{K_2(n-j-1)} & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & I_{\overline{W}K_1(n-1)}\otimes L_{N+R-1}\left(\widetilde{S}^{(2)}\right) \\ O & O & \cdots & I_{\overline{W}}\otimes L_{N+R-n}\left(\widetilde{S}^{(1)}\right)\otimes I_{K_2(0)} \end{pmatrix},$$

$$j=n-N,\ n=\overline{N+1,\,N+R},$$

$$P(n)=\begin{pmatrix} D_2\otimes I_{K_1(0)}\otimes P_n\left(\beta^{(2)}\right) & D_1\otimes P_0\left(\beta^{(1)}\right)\otimes I_{K_2(n)} & \cdots & O \\ O & D_2\otimes I_{K_1(1)}\otimes P_{n-1}\left(\beta^{(2)}\right) & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & D_1\otimes P_n\left(\beta^{(1)}\right)\otimes I_{K_2(0)} \end{pmatrix},$$

$$n=\overline{0,\,N-1},$$

$$\hat{P}(n)=\operatorname{diag}\left\{D_1\otimes P_j\left(\beta^{(1)}\right)\otimes I_{K_2(n-j)},\ j=\overline{0,\,n}\right\},\ n=N,$$

$$\widetilde{P}(n)=\operatorname{diag}\left\{D_1\otimes P_j\left(\beta^{(1)}\right)\otimes I_{K_2(n-j)},\ j=\overline{n-N,\,n}\right\},\ n=\overline{N+1,\,N+R-1},$$

$$\ddot{P}(n)=\begin{pmatrix} I_{\overline{W}K_1(0)}\otimes P_n\left(\beta^{(2)}\right) & O & \cdots & O & O \\ O & I_{\overline{W}K_1(1)}\otimes P_{n-1}\left(\beta^{(2)}\right) & \cdots & O & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ O & O & \cdots & I_{\overline{W}K_1(n)}\otimes P_0\left(\beta^{(2)}\right) & O_{\overline{W}K_1(n)K_2(0)} \end{pmatrix},$$

$$n=\overline{0,\,N-1},$$

$$\widetilde{S}^{(l)}=\begin{pmatrix} 0 & O \\ \boldsymbol{S}_0^{(l)} & S^{(l)} \end{pmatrix},\ \boldsymbol{S}_0^{(l)}=-S^{(l)}\boldsymbol{e},\ l=1,2,\ \ \delta(n)=\begin{cases} 0, & n=\overline{0,\,N-1}; \\ 1, & n=\overline{N,\,N+R}, \end{cases}$$

где O – нулевая матрица, размерность которой ясна из контекста; I_j – единичная матрица размерности j; $\otimes$ – операция Кронекерова произведения матриц; $\oplus$ – операция Кронекеровой суммы матриц; $\Delta\left(n,\,S^{(l)}\right),\ n=\overline{0,\,N+R},\ l=1,2$, – диагональная матрица, такая, что $Q\mathbf{e}=\mathbf{0}$.

Детальное описание матриц $A\left(n,\,S^{(l)}\right)$, $n=\overline{0,\,N+R}$, $L_{N+R-n}\left(\widetilde{S}^{(l)}\right)$, $n=\overline{1,\,N+R}$, $P_n\left(\beta^{(l)}\right)$, $n=\overline{0,\,N+R-1}$, $l=1,2$, и алгоритмы их вычисления могут быть найдены в работах [3, 4].

Доказательство леммы выполняется путем анализа всевозможных переходов процесса $\zeta_t,\ t\geq 0$, за бесконечно малый интервал времени.

СТАЦИОНАРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЦЕПИ МАРКОВА. УСЛОВИЕ СТАЦИОНАРНОСТИ

Определим условие существования стационарного распределения ЦМ $\zeta_t,\ t\geq 0$.

Очевидно, что ЦМ $\zeta_t,\ t\geq 0$, описывающая поведение системы, принадлежит к классу асимптотически квазитеплицевых цепей Маркова (АКТЦМ) с непрерывным временем. Доказательство этого факта следует из определения АКТЦМ с непрерывным временем, приведенного в [5], и вида ИГ. Поэтому для установления условия существования стационарного распределения и вычисления вектора p стационарных вероятностей может быть применен аппарат АКТЦМ с непрерывным временем.

Имеет место следующая теорема.

Теорема. Стационарное распределение ЦМ $\zeta_t, t \geq 0$, существует, если $q < 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *He, Q. M.* Queues with marked customers / Q. M. He // Advances in Applied Probabilities. 1996. Vol. 28. P. 567–587.
2. *Neuts, M.* Matrix-geometric solutions in stochastic models / M. Neuts. Baltimore: The Johns Hopkins University Press, 1981.
3. *Ramaswami, V.* Independent Markov process in parallel / V. Ramaswami // Communications in Statistics-Stochastic Models. 1985. Vol. 1, № 3. P. 419–432.
4. *Ramaswami, V.* Algorithm for the multi-server queue with phase-type service / V. Ramaswami, D. M. Lucantoni // Communications in Statistics-Stochastic Models. 1985. Vol. 1, № 3. P. 393–417.
5. *Klimenok, V. I.* Multi-dimensional asymptotically quasi-toeplitz Markov chains and their application in queueing theory / V. I. Klimenok, A. N. Dudin // Queueing Systems. 2006. Vol. 54. P. 245–259.